数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 16-19

Langevin 分布におけるパラメータの漸近的推測

大阪女子大学・理学部 綿森 葉子 (Yoko Watamori)
Faculty of Science,
Osaka Women's University

1 Langevin 分布

p 変数 Langevin 分布は、密度が $\{a_p(\kappa)\}^{-1}\exp(\kappa\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})$ で与えられる $(p-1)$ 次元球面上の最も重要な分布のひとつである。ここで

$$a_p(\kappa)=(2\pi)^{\frac{p}{2}}I_{\frac{p}{2}-1}(\kappa)\kappa^{-\frac{p}{2}+1},$$

$I_\nu(\kappa)$ は位数 ν の第一種変形 Bessel 関数である。以下、p 変数 Langevin 分布 を $M_p(\boldsymbol{\mu},\kappa)$ であらわす。

以下、$\mathbf{x}\sim M_p(\boldsymbol{\mu},\kappa)$、$\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_n$ を $M_p(\boldsymbol{\mu},\kappa)$ からの独立標本とする。$\bar{\mathbf{x}}=\sum\mathbf{x}_j/n$ とおき、$R=n\|\bar{\mathbf{x}}\|$ を標本合成長という。$\mathbf{x}$ の共分散行列は

$$\Sigma=A_p'(\kappa)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'+\frac{A_p(\kappa)}{\kappa}(I_p-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}')$$

で、$A_p(\kappa)$ は $A_p(\kappa)=d\{\log a_p(\kappa)\}/d\kappa$ で定義される κ の関数。Σ は正定値であることに注意する。さらに κ, $\boldsymbol{\mu}$ の最尤推定量をそれぞれ $\hat{\kappa}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ とすると、

$$A_p(\hat{\kappa})=\|\bar{\mathbf{x}}\|,\quad \hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\bar{\mathbf{x}}\|}$$

である。球面上の統計解析については、例えば Mardia & Jupp (2000), Fisher (1993), Watson(1983) の本とその中の文献を参考にされたい。

2 推定問題

$\hat{\kappa}$ は偏りのある推定量であることがシミュレーションなどを用いて示されており、Schou (1978) は R の分布に基づく周辺尤度を最大にするこ

とによって推定量を提案した。これを $\check{\kappa}$ とかくと、

$$\begin{aligned}\check{\kappa} &= 0 \quad \cdots \quad R \leq n^{\frac{1}{2}} \\ nA_p(\check{\kappa}) &= RA_p(\check{\kappa}R) \quad \cdots \quad R > n^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

p, κ がともに大きいときの漸近展開を導くことにより次の推定量が与えられる。

$$\hat{\kappa}_c = \frac{n(p-1)R}{n^2 - R^2}, \quad \check{\kappa}_c = \frac{\sqrt{n(n-1)}(p-1)\sqrt{R^2 - n}}{n^2 - R^2}$$

3 検定問題

仮説 $H_1 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ について、信頼領域 C $(Pr(C) = 1 - \alpha)$ は $C = \{\boldsymbol{\mu}'\bar{\mathbf{x}} \geqq d\} = \{\cos\delta \geqq d/R\}$ と変形される。よって d を与えればよいことになる。n, p, κ がともに大きいとき、

$$\frac{\kappa}{n} = (const.), \quad \frac{p-1}{n} = m\,(const.)$$

という仮定の下で

$$d = h^{-1}\left(\underline{z}_\alpha + b_1(\underline{z}_\alpha)/n\right)$$

で与えられる。ここで $\underline{z}_\alpha$ は標準正規分布の下側 $100\alpha\%$ 点である。

$$k := \sqrt{\frac{4\kappa^2}{(p-1)^2} + 1}$$

とおく。κ 既知のとき

$$h(U) = n\sqrt{\frac{mk(k+1)}{2}} \int_{A_p(\kappa)}^{U} \left(\frac{1 - s^2}{1 - A_p(\kappa)^2}\right)^{-\frac{2k+1}{3k}} ds$$

$$b_1(y) = \frac{(2k+1)\sqrt{k-1}}{3k\sqrt{2mk}} + \frac{2k^2 - k - 2}{2mk^3}\,y$$

κ 未知のときは κ を κ の推定量でおきかえることにより信頼区間が得られる。

$H_2 : \kappa = \kappa_0$ の検定に関して、$\boldsymbol{\mu}$ 既知のとき尤度比統計量 T_L とスコア統計量 T_W は

$$\begin{aligned}T_L &= 2\left\{(\hat{\kappa} - \kappa_0)\,\boldsymbol{\mu}^t\bar{\mathbf{x}} - \log a_p(\hat{\kappa}) + \log a_p(\kappa_0)\right\}, \\ T_W &= \frac{\{\boldsymbol{\mu}^t\bar{\mathbf{x}} - A_p(\kappa_0)\}^2}{A_p'(\kappa_0)},\end{aligned}$$

で与えられ、T_L の n に関する補正は

$$T_L^* = (1+\frac{B}{n})^{-1}T_L$$

で与えられる。ここで

$$B = \frac{5A_p''(\kappa_0)^2 - 3A_p'''(\kappa_0)A_p'(\kappa_0)}{12A_p'(\kappa_0)^3}$$

スコア統計量 T_W の n に関する展開は

$$\begin{aligned} P(T_W > x) &= P(\chi_1^2 > x) + \frac{1}{n}\left\{B_0 P(\chi_1^2 > x) + B_1 P(\chi_3^2 > x)\right. \\ &\quad \left. + 3B_2 P(\chi_5^2 > x) + 15B_3 P(\chi_7^2 > x)\right\} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{B}{2} \\ B_1 &= \frac{5A_p''(\kappa_0)^2 - 2A_p'''(\kappa_0)A_p'(\kappa_0)}{8A_p'(\kappa_0)^3} \\ B_2 &= \frac{A_p'''(\kappa_0)A_p'(\kappa_0) - 5A_p''(\kappa_0)^2}{24A_p'(\kappa_0)^3} \\ B_3 &= \frac{A_p''(\kappa_0)^2}{72A_p'(\kappa_0)^3}. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 未知のときは

$$\begin{aligned} T_L &= 2\left\{(\hat{\kappa} - \kappa_0) - \log a_p(\hat{\kappa}) + \log a_p(\kappa_0)\right\}, \\ T_W &= \frac{\left\{A_p(\hat{\kappa}) - A_p(\kappa_0)\right\}^2}{A_p'(\kappa_0)}, \end{aligned}$$

で、係数はそれぞれ

$$B = \frac{5A_p''(\kappa_0)^2 - 3A_p'''(\kappa_0)A_p'(\kappa_0)}{12A_p'(\kappa_0)^3} + (p-1)\frac{2A_p''(\kappa_0)\kappa_0 - (p-3)A_p'(\kappa_0)}{4A_p'(\kappa_0)^2\kappa_0^2}$$

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{B}{2} \\
B_1 &= \frac{5A_p''(\kappa)^2 - 2A_p'''(\kappa)A_p'(\kappa)}{8A_p'(\kappa)^3} - (p-1)\frac{4A_p''(\kappa)\kappa - (p-3)A_p'(\kappa)}{8A_p'(\kappa)^2\kappa^2} \\
B_2 &= \frac{A_p'''(\kappa)A_p'(\kappa) - 5A_p''(\kappa)^2}{24A_p'(\kappa)^3} + (p-1)\frac{A_p''(\kappa)}{12A_p'(\kappa)^2\kappa} \\
B_3 &= \frac{A_p''(\kappa)^2}{72A_p'(\kappa)^3}.
\end{aligned}
$$

で与えられる。

参考文献

[1] FISHER, N. I. (1993). *Statistical Analysis of Curcular Data.* .

[2] JUPP, P. E. and MARDIA, K. V. (2000). *Directional statistics.* Wiley.

[3] SCHOU, G. (1976). Estimation of the concentration parameter in von Mises-Fisher distributions. *Biometrika.* **65**, 369-377.

[4] WATSON, G. S. (1983). *Statistics on Spheres.* Wiley.